Chapitre 23

Intégrales généralisées

I Généralités

1) Intégrale impropre en une borne

a) Rappel et problématique :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors f admet une primitive F et on définit $\int_a^b f(t)dt$ comme étant $F(b)-F(a)$.

Mais que faire si la fonction est continue sur $[a,b[$ seulement ? ou $]a,b]$? Ou si $b=+\infty$? Ou si $a=-\infty$?

b) Définitions et exemples

Définition 1

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$, avec $a<b$ et $b\in\mathbb{R}$ ou $b=+\infty$.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est impropre (ou généralisée) en b.
De la même façon, si f est continue sur $]a,b]$ avec $a<b$, $a\in\mathbb{R}$ ou $a=-\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est impropre en a.

Exemples :

L'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ est impropre en

L'intégrale $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est impropre en

Danger ! *Attention aux trous !*
Ces définitions concernent des fonctions continues sur des intervalles éventuellement ouverts en un côté. Des intégrales comme $\int_{-1}^1\frac{1}{t^2}dt$ ne rentrent pas dans cette théorie : le point de discontinuité est à l'intérieur de l'intervalle...

2) Convergence d'une intégrale impropre

a) Intégrale impropre convergente

Définition 2

Soit f continue sur $[a,b[$ avec b réel ou $b=+\infty$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$ existe et est finie.
On a alors $\int_a^b f(t)dt=\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$
De même, si f est continue sur $]a,b]$, avec a réel ou $a=-\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\lim\limits_{x\to a}\int_x^b f(t)dt$ existe et est finie.
On a alors $\int_a^b f(t)dt=\lim\limits_{x\to a}\int_x^b f(t)dt$.

Exemples

1. Etudions $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$, qui est impropre en $+\infty$.

2. Etudions $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$, impropre en 0.

Méthode : *Montrer une convergence à partir d'une primitive*

Si la fonction intégrée admet une primitive facile à calculer, on remplace la borne problématique par un "x" (ou une autre lettre si x n'est pas disponible....) et on se ramène à un calcul d'intégrale classique.
On passe ensuite à la limite.
C'est plus ou moins le même principe que les sommes partielles pour les séries !

b) Intégrales doublement impropres

Si f est continue sur $]a, b[$, l'intégrale est dite doublement impropre. Mais grâce à la relation de Chasles, on se ramène au calcul de deux intégrales impropres en une seule borne :

Définition 3

Soit f continue sur $]a, b[$. On dit que l'intégrale doublement impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si, pour un réel $c \in]a, b[$, les intégrales impropres $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et sont finies.
On a alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

c) Cas des intégrales faussement impropres

Définition 4

Soient a et b réels (pas d'infini donc), et soit f une fonction continue sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$, ou $]a, b[$).
On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est faussement impropre si f peut être prolongé par continuité sur $[a, b]$.

Propriété 1

Une intégrale faussement impropre est toujours convergente.
Plus précisément, en notant $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$$

▷ *Preuve :*
Montrons la propriété dans le cas f continue sur $[a,b[$, les autres cas sont similaires.

Soit $x \in [a,b[$, alors $\int_a^x f(t)dt = \int_a^x \tilde{f}(t)dt$ (puisque $f = \tilde{f}$ sur $[a,b]$)
Soit F une primitive de $\tilde{f}$ sur $[a,b]$.
Alors F est continue sur $[a,b]$ (puisque dérivable) et $\int_a^x \tilde{f}(t)dt = F(x) - F(a)$. Comme F est continue, on a $\lim_{x\to b} F(x) = F(b)$ et donc

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to b}\int_a^x \tilde{f}(t)dt = F(b) - F(a) = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$$

Ainsi $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et vaut $\int_a^b \tilde{f}(t)dt$

◁

Exemple :
L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$ est a priori impropre en 0, mais $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$, donc la fonction intégrée est prolongeable par continuité en 0.
L'intégrale est donc faussement impropre et converge (sans pour autant qu'on connaisse la valeur)

3) Propriétés communes des intégrales impropres et des intégrales classiques

Etant donné que les intégrales impropres sont des limites d'intégrales, et que les limites ont des propriétés de

1. linéarité
2. conservation du signe
3. unicité

on va retrouver la plupart des propriétés des intégrales classiques.

Théorème 1

1. ***Linéarité :*** *Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors pour tout λ, μ réels, $\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt$ converge et on a*
$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt = \lambda\int_a^b f(t)dt + \mu\int_a^b g(t)dt.$$

2. ***Positivité :*** *Si f est continue et positive sur $[a,b[$ (ou $]a,b]$ ou $]a,b[$) et si $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.*
En outre, si $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors f est nulle sur $[a,b[$ (resp $]a,b]$, resp $]a,b[$).

3. ***Relation de Chasles :*** *Si $\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale convergente, alors pour tout $c \in]a,b[$,*
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

4. ***Croissance de l'intégration :***
Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a,b[$ (resp. $I =]a,b]$, resp $I =]a,b[$) tells que pour tout $t \in I$, $f(t) \leq g(t)$.
Si les intégrales impropres $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors
$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

Danger ! *Piège classique !*

Attention, toutes ces propriétés demandent explicitement la convergence de l'intégrale. Il faudra donc toujours commencer par montrer la convergence avant d'utiliser ces propriétés....

II Détermination de la nature des intégrales impropres

1) Utilisation des techniques de calculs d'intégrales

a) Intégration par partie

Méthode : *IPP et pour des intégrales impropres*

Si on veut utiliser l'intégration par partie pour des intégrales impropres, on se ramènera TOUJOURS à une intégrale classique et on passe à la limite.
On ne fait JAMAIS directement le calcul avec des bornes problématiques.

Exemple :

Nature et calcul de $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$:

b) Changement de variable

On peut, de la même façon que pour l'IPP, faire des changement de variable en se ramenant à une intégrale impropre et en passant à la limite. On peut néanmoins utiliser le résultat suivant pour aller plus rapidement :

Proposition 1

Soient a, b, α, β des nombres réels ou infinis.
Soit f continue sur $]a, b[$ et φ une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, croissante et de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors les intégrales $\int_a^b f(u)du$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

▷ *Preuve :* C'est le changement de variable en passant à la limite. Comme φ est supposée croissante, on va avoir $\lim\limits_{X\to\alpha} \varphi(X) = a$ et $\lim\limits_{X\to\beta} \varphi(X) = b$, d'où les bornes proposées.

◁

On peut évidemment formuler le même résultat avec φ décroissante, les bornes sont alors inversées.

c) Parité et imparité

Définition 5 (*Rappel*)

Soit I un intervalle de la forme $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction f définie sur I est :

- *paire si et seulement si $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$*
- *impaire si et seulement si $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$*

Danger ! *Impaire n'est pas le contraire de paire*
Une fonction qui n'est pas paire n'est pas forcément impaire : elle peut être ni l'une, ni l'autre.
(par exemple $x \mapsto e^x$ n'est ni paire, ni impaire)

Théorème 2

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Alors si f est paire, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)dt$, et si f est impaire alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$

▷ *Preuve :*

◁

2) Cas des intégrales impropres de fonctions positives

a) Préambule

Tout comme les séries à termes positifs, les intégrales de fonctions positives ont des propriétés intéressantes qui permettent de donner des critères de convergence.
En effet, si f est continue et positive sur $[a, b[$, alors pour tout $x \in [a, b[$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante : c'est une primitive de f, donc si on la dérive, on obtient f qui est positive...
En conséquence, $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$ est finie si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée.
Cette remarque est la clé de la preuve des trois critères que l'on va donner.

b) Critères de convergences

Théorème 3 (*critère de comparaison*)

Soit f et g deux fonctions continues et ***positives*** *sur $[a, b[$, telles que, au voisinage de b, $f(t) \leq g(t)$.*
Alors :

1. *si $\int_a^b g(t)dt$ converge, $\int_a^b f(t)dt$ converge aussi.*
2. *Contraposée : si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge aussi.*

Théorème 4 (*Critère d'équivalence*)

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b[$ et ***positives*** *au voisinage de b.*
Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Théorème 5 (*Critère de négligeabilité*)

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b[$ et ***positives*** *au voisinage de b.*
Si $f \underset{b}{=} o(g)$, et $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge également.

A noter : *utilisation des critères :*

1. Notez la notion de positivité au voisinage de b. Peut importe ce qu'il se passe au voisinage de a : la fonction y est continue, donc pas de problème d'intégrale....
2. Tous ces théorèmes sont bien sûr valables sur des intervalles de la forme $]a, b]$, en remplaçant le voisinage de b par le voisinage de a.
3. Si les fonctions à intégrer sont négatives et qu'on veut utiliser les critères de convergence, on considérera l'intégrale opposée, de même nature mais du coup positive...
4. Attention, comme pour les séries, les intégrales ne sont pas équivalentes si les fonctions le sont, elles sont seulement de même nature !
5. Le théorème 5 est une conséquence évidente du critère de comparaison puisqu'alors au voisinage de b on a $f(t) \leq g(t)$.

c) Convergence absolue

A nouveau, notion analogue de celle sur les séries :

Définition 6

On dit qu'une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si et seulement si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

En introduisant comme pour les séries f^+ et f^-, on montre que :

Théorème 6

Toute intégrale absolument convergente est convergente

et on a un résultat déjà connu sur les intégrales classiques,

Proposition 2 (*Inégalité de Jensen - ou inégalité triangulaire*)

Si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

III Intégrales impropres de référence

1) Intégrale exponentielle

Proposition 3

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$

▷ *Preuve :*

◁

2) Intégrales de Riemann

a) Définition

Définition 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle intégrales de Riemann les intégrales de la forme $\int_0^b \frac{1}{t^\alpha} dt$ avec $b > 0$ ou $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ avec $a > 0$.

Exemples :

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, avec $\alpha = 2$. On a vu qu'elle convergeait.
- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est aussi une intégrale de Riemann, impropre en 0, avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

b) Convergence en $+\infty$

Proposition 4

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

▷ *Preuve :*

◁

c) Convergence en 0

Proposition 5

$\int_0^b \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

▷ *Preuve :* Exactement le même cheminement que pour le cas en $+\infty$, en regardant cette fois $\int_x^b \frac{1}{t^\alpha} dt$ avec $x \in]0, b[$.

◁

d) Deux cas particuliers

Via des changements de variables afin de se ramener au cas précédent, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 6

soient a et b deux réels avec $a < b$
Les intégrales $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ et $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.